Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Madrid 2019, Ordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Opción A. Álgebra

Dadas la matrices $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}}$ **y** $\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$, **se pide:**

a) **Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.**
b) **Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso** $\boldsymbol{a = 0}$.

Solución:

a) **Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.**

La matriz A es 3×4, su rango máximo es 3. Calculamos el determinante del menor formado por las tres primeras columnas (M123):

$$\begin{aligned} |M_{123}| &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} \\ &= a^2 - 6 + 8 - (-4a + 4 + 3a) \\ &= a^2 + 2 - (-a + 4) = a^2 + 2 + a - 4 = a^2 + a - 2 \end{aligned}$$

$|M_{123}| = 0 \implies a^2 + a - 2 = 0 \implies a = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$. Valores críticos: $a = 1, a = -2$.

Caso 1: Si $\boldsymbol{a \neq 1}$ **y** $\boldsymbol{a \neq -2}$. $|M_{123}| \neq 0$. Existe un menor de orden 3 no nulo. $\text{Rg}(A) = 3$.

Caso 2: Si $\boldsymbol{a = 1}$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. $|M_{123}| = 0$. $\text{Rg}(A) < 3$.

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0$. $\text{Rg}(A) \geq 2$.

Consideramos el menor M124: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 + 2 - (-1 + 2 - 3) = -2 - (-2) = 0$.

Todos los menores de orden 3 son 0 (se puede verificar o notar que F1 = F2 + 2*F3). $\text{Rg}(A) = 2$.

Caso 3: Si $\boldsymbol{a = -2}$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. $|M_{123}| = 0$. $\text{Rg}(A) < 3$.

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5 \neq 0$. $\text{Rg}(A) \geq 2$.

Observamos que $F_3 = -F_2$. Las filas son linealmente dependientes. $\text{Rg}(A) = 2$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Si } \boldsymbol{a \neq 1} \textbf{ y } \boldsymbol{a \neq -2} : \textbf{Rg}\boldsymbol{(A) = 3} \\ \textbf{Si } \boldsymbol{a = 1} : \textbf{Rg}\boldsymbol{(A) = 2} \\ \textbf{Si } \boldsymbol{a = -2} : \textbf{Rg}\boldsymbol{(A) = 2} \end{array}}$$

b) **Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso** $\boldsymbol{a = 0}$.

Para $a=0$, $A=\begin{pmatrix}1&3&4&1\\1&0&2&2\\-1&2&0&-2\end{pmatrix}$. $AM=\begin{pmatrix}1&3&4&1\\1&0&2&2\\-1&2&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&1\\1&0&2\\-1&2&-2\end{pmatrix}$.

$$|AM|=1(0-4)-3(-2-(-2))+1(2-0)=-4-3(0)+2=-2$$

Como $|AM|=-2\neq 0$, existe la inversa. $\text{Adj}(AM)=\begin{pmatrix}-4&0&2\\8&-1&-5\\6&-1&-3\end{pmatrix}$

$(\text{Adj}(AM))^t=\begin{pmatrix}-4&8&6\\0&-1&-5\\2&-5&-3\end{pmatrix}$. $(AM)^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-4&8&6\\0&-1&-5\\2&-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4&-3\\10&1/2&1/2\\-1&5/2&3/2\end{pmatrix}$.

$$\boxed{\boldsymbol{(AM)^{-1}=\begin{pmatrix}2&-4&-3\\10&1/2&1/2\\-1&5/2&3/2\end{pmatrix}}}$$

Ejercicio 2. Opción A. Análisis

Dada $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, donde In denota el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$ se pide:

a) **Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$.**
b) **Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.**
c) **Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.**

Solución:

a) **Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$.**

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{L'H} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0$. Asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \to +\infty$.

$$\boxed{\textbf{La curva tiene una asíntota horizontal en } y = 0 \textbf{ cuando } x \to +\infty.}$$

b) **Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.**

Tangente horizontal $\implies f'(x) = 0$. $f'(x) = \frac{(1/x)x-\ln(x)(1)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$. $f'(x) = 0 \implies 1 - \ln(x) = 0 \implies \ln(x) = 1 \implies x = e$. Punto: $(e, f(e)) = (e, \ln(e)/e) = (e, 1/e)$. Analizamos el signo de $f'(x)$:

Intervalo	$(0, e)$	$(e, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	$-$
Comportamiento $f(x)$	*Creciente* $\nearrow$	*Decreciente* $\searrow$

Hay un máximo relativo en $x = e$.

$$\boxed{\textbf{El punto es } (e, 1/e)\textbf{. Es un máximo relativo.}}$$

c) **Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.**

$f(x) = 0 \implies \ln(x) = 0 \implies x = 1$. Límites de integración: 1 y e. $f(x) \geq 0$ en $[1, e]$.
Área $= \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$.
Sustitución $u = \ln(x), du = \frac{1}{x} dx$.
Límites: $u(1) = 0, u(e) = 1$.
Área $= \int_0^1 u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Área} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{ud^2}}$$

Ejercicio 3. Opción A. Geometría

Dadas la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = z$ y la recta s que pasa por el punto (2,-5, 1) y tiene dirección (-1,0,-1), se pide:

a) **Estudiar la posición relativa de las dos rectas.**
b) **Calcular un plano que sea paralelo ar y contenga a s.**
c) **Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.**

Solución:

a) **Estudiar la posición relativa de las dos rectas.**

r: Punto $A(1,3,0)$, $\vec{v}_r = (2,-2,1)$.
s: Punto $B(2,-5,1)$, $\vec{v}_s = (-1,0,-1)$.
$\vec{v}_r, \vec{v}_s$ no son proporcionales $\Longrightarrow$ se cortan o cruzan.
$\vec{AB} = B - A = (1,-8,1)$.
Producto mixto $[\vec{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 1 & -8 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1(2-0)-(-8)(-2-(-1))+1(0-2) = 2+8(-1)-2 =$
$2-8-2 = -8 \neq 0$.
Las rectas se cruzan.

$$\boxed{\textbf{Las rectas r y s se cruzan.}}$$

b) **Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.**

El plano π contiene a s, pasa por $B(2,-5,1)$ y contiene a $\vec{v}_s = (-1,0,-1)$. Como es paralelo a r, contiene a $\vec{v}_r = (2,-2,1)$.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$(x-2)(0-2) - (y+5)(-1-(-2)) + (z-1)(2-0) = 0$ $-2(x-2) - (y+5)(1) + 2(z-1) = 0$ $-2x+4-y-5+2z-2 = 0 \Longrightarrow -2x-y+2z-3 = 0$. $2x+y-2z+3 = 0$.

$$\boxed{\boldsymbol{\pi \equiv 2x + y - 2z + 3 = 0}}$$

c) **Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.**

El plano σ es $\perp r$, su vector normal $\vec{n}_\sigma = \vec{v}_r = (2,-2,1)$. Ecuación: $2x - 2y + z + D = 0$. Pasa por $O(0,0,0)$: $2(0) - 2(0) + 0 + D = 0 \Longrightarrow D = 0$. Ecuación: $2x - 2y + z = 0$.

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma \equiv 2x - 2y + z = 0}}$$

Ejercicio 4. Opción A. Probabilidad y Estadística

La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10%. Se pide:

a) **Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.**

b) **Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.**

Solución:

a) **Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.**

X= nº peces vivos tras 5 años.

$$X \sim B(n = 10, p = 0.10)$$
$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$
$$P(X = 0) = \binom{10}{0}(0.1)^0(0.9)^{10} \approx 0.3487$$
$$P(X = 1) = \binom{10}{1}(0.1)^1(0.9)^9 = 10(0.1)(0.9)^9 \approx 0.3874$$
$$P(X \geq 2) \approx 1 - (0.3487 + 0.3874) = 1 - 0.7361 = 0.2639$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(X \geq 2) \approx 0.2639}}$$

b) **Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.**

Y= nº peces vivos tras 5 años.

$$Y \sim B(n = 200, p = 0.10)$$

$$np = 200(0.1) = 20 \geq 5$$

.

$$nq = 200(0.9) = 180 \geq 5$$

Aproximación válida.

$$Y' \sim N(\mu = np = 20, \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{20(0.9)} = \sqrt{18} \approx 4.243)$$

$$P(Y \geq 10) \approx P(Y' \geq 9.5)$$

(corrección por continuidad).
Estandarizamos:

$$P\left(Z \geq \frac{9.5 - 20}{\sqrt{18}}\right) = P\left(Z \geq \frac{-10.5}{\sqrt{18}}\right) \approx P(Z \geq -2.47)$$

$P(Z \geq -2.47) = P(Z \leq 2.47)$. Tabla N(0,1): $\Phi(2.47) = 0.9932$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	~~0,9918~~	~~0,9920~~	~~0,9922~~	~~0,9925~~	~~0,9927~~	~~0,9929~~	~~0,9931~~	0,9932	0,9934	0,9936

$\boxed{\textbf{La probabilidad es aproximadamente 0.9932}}$.

Ejercicio 1. Opción B. Álgebra

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros. Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40% respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Solución:

¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Sean x, y, z los precios de bocadillo, refresco y patatas.

1. Devolución por cobro extra: $x + z = 4$.
2. Coste real de la compra: $3x + 2y + 2z = 19 - 4 = 15$.
3. Oferta con descuento: $0.60(x + y) = 3 \implies x + y = 3/0.6 = 5$.

Lo resolvemos por el método de Cramer:

Matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Determinante de A:

$$|A| = 1(0 - 2) - 0 + 1(3 - 2) = -2 + 1 = -1$$

Como $|A| = -1 \neq 0$, el sistema es S.C.D. Aplicamos Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 15 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4(0 - 2) - 0 + 1(15 - 10)}{-1} = \frac{-8 + 5}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 15 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1(0 - 10) - 4(0 - 2) + 1(15 - 15)}{-1} = \frac{-10 - 4(-2) + 0}{-1} = \frac{-10 + 8}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 15 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1(10 - 15) - 0 + 4(3 - 2)}{-1} = \frac{-5 + 4(1)}{-1} = \frac{-5 + 4}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

$$\boxed{\textbf{Precio bocadillo: 3 euros},\ \textbf{Precio refresco: 2 euros},\ \textbf{Precio patatas: 1 euro}.}$$

Ejercicio 2. Opción B. Análisis

Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide:

a) Determinar su dominio.
b) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
c) Calcular los límites laterales $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x}, \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$.

Solución:

a) Determinar su dominio.

Dominio: $4x^2 - x^4 \geq 0 \implies x^2(4-x^2) \geq 0 \implies x^2(2-x)(2+x) \geq 0$. Como $x^2 \geq 0$, necesitamos $(2-x)(2+x) \geq 0$. Esto ocurre en el intervalo $[-2,2]$. Dominio $= [-2,2]$.

$$\boxed{\textbf{Dominio: } [-2,2]}$$

b) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

$f(x) = |x|\sqrt{4-x^2}$. Derivamos en $(-2,0) \cup (0,2)$: $f'(x) = \frac{4x(2-x^2)}{2|x|\sqrt{4-x^2}} = \frac{2x(2-x^2)}{|x|\sqrt{4-x^2}}$. Puntos críticos ($f'(x) = 0$): $2 - x^2 = 0 \implies x = \pm\sqrt{2}$. Intervalos: $(-2,-\sqrt{2}), (-\sqrt{2},0), (0,\sqrt{2}), (\sqrt{2},2)$. Signo de $f'(x)$:

Intervalo	$(-2,-\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},0)$	$(0,\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},2)$
Signo $f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
Comportamiento $f(x)$	**Creciente** $\nearrow$	**Decreciente** $\searrow$	**Creciente** $\nearrow$	**Decreciente** $\searrow$

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Crecimiento: } (-2,-\sqrt{2}) \cup (0,\sqrt{2}) \\ \textbf{Decrecimiento: } (-\sqrt{2},0) \cup (\sqrt{2},2)\end{array}}$$

c) Calcular los límites laterales $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x}, \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|\sqrt{4-x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x\sqrt{4-x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\sqrt{4-x^2} = -2.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|\sqrt{4-x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{4-x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{4-x^2} = 2.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = -2, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 2}$$

Ejercicio 3. Opción B. Geometría

Dados el punto $A(2,1,0)$ y el plano $\pi \equiv 2x+3y+4z=36$, se pide:

a) **Determinar la distancia del punto A al plano π.**
b) **Hallar las coordenadas del punto del plano más próximo al punto A.**
c) **Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.**

Solución:

a) **Determinar la distancia del punto A al plano π.**

$$d(A,\pi)=\frac{|2(2)+3(1)+4(0)-36|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=\frac{|4+3-36|}{\sqrt{4+9+16}}=\frac{|-29|}{\sqrt{29}}=\frac{29}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}ud$$

$$\boxed{\boldsymbol{d(A,\pi)=\sqrt{29}}\textbf{ud}}$$

b) **Hallar las coordenadas del punto del plano más próximo al punto A.**

Es la proyección ortogonal M.
1. Recta $r\perp\pi$ por $A(2,1,0)$. $\vec{v}_r=\vec{n}_\pi=(2,3,4)$.
$r\equiv(2+2\lambda,1+3\lambda,4\lambda)$.
2. Intersección $M=r\cap\pi$:
$2(2+2\lambda)+3(1+3\lambda)+4(4\lambda)=36 \implies 4+4\lambda+3+9\lambda+16\lambda=36 \implies 29\lambda+7=36 \implies 29\lambda=29 \implies \lambda=1$.
$M=(2+2(1),1+3(1),4(1))=(4,4,4)$.

$$\boxed{\textbf{El punto más próximo es } \boldsymbol{M(4,4,4)}.}$$

c) **Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.**

M es punto medio de AA'. $A'=2M-A$. $A'=2(4,4,4)-(2,1,0)=(8,8,8)-(2,1,0)=(6,7,8)$.

$$\boxed{\textbf{El punto simétrico es } \boldsymbol{A'(6,7,8)}.}$$

Ejercicio 4. Opción B. Probabilidad

Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80% de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10%. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

a) **Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.**
b) **Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.**

Solución:

Eventos: M="Medicamento", Pl="Placebo", Me="Mejora".

$P(M) = 0.5, P(Pl) = 0.5.$

$P(Me|M) = 0.80, P(Me|Pl) = 0.10.$

a) **Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.**

Probabilidad Total:
$P(Me) = P(Me|M)P(M) + P(Me|Pl)P(Pl)$
$P(Me) = (0.80)(0.5) + (0.10)(0.5) = 0.40 + 0.05 = 0.45.$

$$\boxed{\textbf{La probabilidad de que un paciente mejore es 0.45}.}$$

b) **Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.**

Bayes:

$$P(M|Me) = \frac{P(Me|M)P(M)}{P(Me)}$$

$$P(M|Me) = \frac{(0.80)(0.5)}{0.45} = \frac{0.40}{0.45} = \frac{40}{45} = \frac{8}{9}$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(M|Me) = \frac{8}{9} \approx 0.8889}}$$